23/05/16.

$K \subset U \subset \mathbb{R}^2$, K: συμπαγές κ' J-μετρ. U: ανοικτό

παραμ. πεδίο, $\bar{\Phi}: U \to \mathbb{R}^3$ C^1, $\bar{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$\bar{\Phi}: K \to \mathbb{R}^3$ παραμ. επιφάνεια. ~~$\bar{\Phi}(u,v)=$~~

$$\Rightarrow D\bar{\Phi}(u,v) = \Big(\underbrace{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u}(u,v)}_{\in \mathbb{R}^{3\times 1}}, \underbrace{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}(u,v)}_{\in \mathbb{R}^{3\times 1}} \Big) \in \mathbb{R}^{3\times 2} \Rightarrow$$

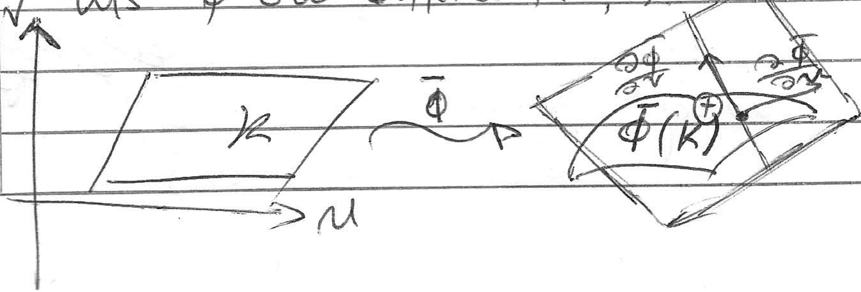
$$\Rightarrow \bar{N}(u,v) = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}(u,v)$$ (κάθετο διάνυσμα στο σημείο $\bar{\Phi}(u,v)$)

και αν $\bar{N}(u,v) \neq \bar{0} \Rightarrow \exists \vec{n}(u,v) = \dfrac{\bar{N}(u,v)}{\|\bar{N}(u,v)\|}$ με $\|\bar{n}(u,v)\| = 1$:

: μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και

αν αυτό ισχύει $\forall (u,v) \in K \Rightarrow \bar{\Phi}(u,v): K \to \mathbb{R}^3$: κανονική επιφάνεια.

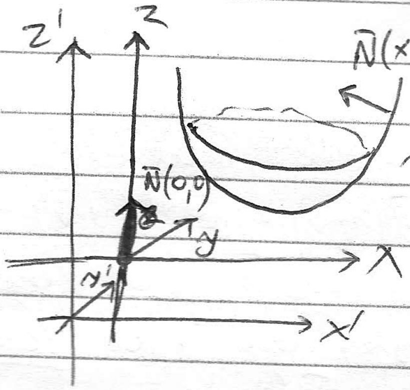
και τα $\dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u}(u,v)$, $\dfrac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}(u,v)$ παράγουν το εφ/νο επίπεδο της $\bar{\Phi}$ στο σημείο $\bar{\Phi}(u,v)$



π.χ.: Έστω $\bar{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \Rightarrow D\bar{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}_{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x}} & \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}_{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \bar{N}(x,y) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}\right](x,y) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\partial f/\partial y \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \bar{N}(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{N}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

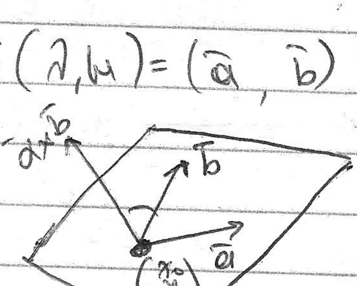
Άρα επιφάνειες που προκύπτουν ως γραφήματα συναρτήσεων (και με κατάλληλο K) είναι πάντα κανονικές.

Στο παράδειγμα το εφ/νο επίπεδο είναι πράγματι το $\bar{\Phi}(u,v) + \lambda \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u}(u,v) + \mu \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}(u,v)$

π.χ. εδώ: $\underbrace{\bar{\Phi}(0,0)}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{\Phi}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\bar{a}} + \mu \bar{b}$, $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3$ ΓΑ
(επίπεδο) $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

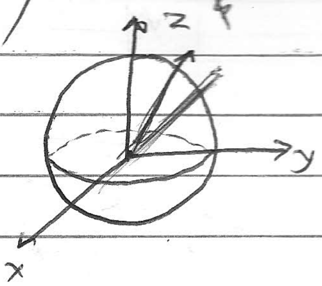
$$D\bar{\Phi}(\lambda,\mu) = (\bar{a}, \bar{b}) \Rightarrow \bar{N}(\lambda,\mu) = \bar{a} \times b \perp \bar{a}, \bar{b}$$



και το εφ/νο επίπεδο στο $\bar{\Phi}(\lambda,\mu)$ είναι το ίδιο το επίπεδο $\bar{\Phi}(\lambda,\mu)$ αφού $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \lambda}(\lambda,\mu) = \bar{a} \wedge \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \mu}(\lambda,\mu) = \bar{b}$

Παράδειγμα: Στην περίπτωση της σφαίρας $\bar{\Phi}(\theta,\varphi) = r\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$

Έχουμε: $\bar N(\theta,\varphi) = r^2 \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} =$

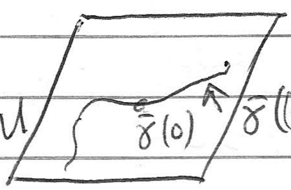


$$= r^2\sin\theta\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \quad \left(= r\bar\Phi(\theta,\varphi)\right)$$

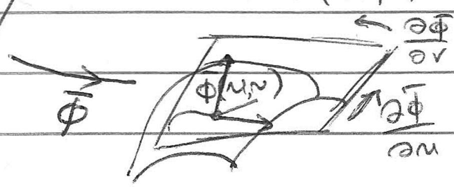
$\|\bar N(\theta,\varphi)\| = r^2\sin\theta$. Η σφαίρα δεν είναι κανονική επιφάνεια στο βόρειο κ' νότιο πόλο.

Παρατήρηση: Το δ/μα $\bar N(u,v)$ είναι κάθετο στην $\bar\Phi$ σε κάθε σημείο $\bar\Phi(u,v)$ υπό την έννοια ότι είναι κάθετο στο εφ/νο δ/μα κάθε καμπύλης πάνω στην $\bar\Phi$ που περνάει από το σημείο $\bar\Phi(u,v)$.

Ειδικότερα: έστω $\bar\alpha = \bar\Phi\circ\bar\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^3$, $\varepsilon>0$, $\bar\gamma=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$: $(-\varepsilon,\varepsilon)\mapsto\mathbb{R}^2$ με $\bar\gamma((-\varepsilon,\varepsilon))\subset K\subset U$ και $\bar\gamma(0)=(u,v)$.



$\bar\gamma((-\varepsilon,\varepsilon)) \Rightarrow \bar\alpha(-\varepsilon,\varepsilon) = \bar\Phi((\bar\gamma(-\varepsilon,\varepsilon))) \subset \bar\Phi(U) \Rightarrow$



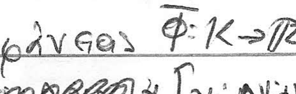
$$\Rightarrow \bar\alpha'(0) = D\bar\Phi(\underbrace{\bar\gamma(0)}_{=(u,v)})\cdot\bar\gamma'(0) = \left(\frac{\partial\bar\Phi}{\partial u},\frac{\partial\bar\Phi}{\partial v}\right)\cdot\begin{pmatrix}\gamma_1'(0)\\ \gamma_2'(0)\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial\bar\Phi}{\partial u}(u,v)}_{\in\mathbb{R}^3}\underbrace{\gamma_1'(0)}_{\in\mathbb{R}} + \frac{\partial\bar\Phi}{\partial v}(u,v)\gamma_2'(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar N(u,v)\cdot\bar\alpha'(0)=0}$$

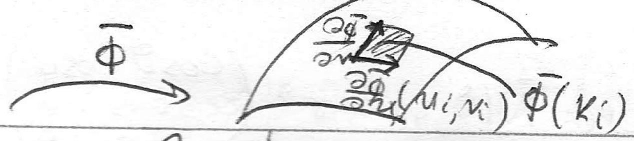
Εμβαδόν τμήματος επιφάνειας / Ολοκλήρωμα πραγμ. συνάρτησης πάνω σε επιφάνεια.

Παρατήρηση/Παράδειγμα: Έστω η επιφάνεια $\bar\Phi(u,v)=\bar c+u\bar a+v\bar b$, $(u,v)\in K=[0,1]\times[0,1]$.



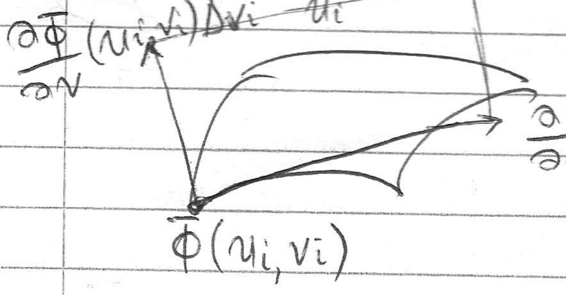
$E=\|\bar a\times\bar b\| = \|\bar N(u,v)\| =$ σταθ., $\forall (u,v)\in K$

Διαμερίζουμε το $K\subset\mathbb{R}^2$ μιας παραμετρικής επιφάνειας $\bar\Phi: K\to\mathbb{R}^3$ σε κλ. ορθογώνια της μορφής $K_i=[u_i, u_i+\Delta u_i]\times[v_i, \Delta v_i+v_i]$



Το τμήμα $\bar\Phi(K)$ έχει προσεγγιστικά εμβαδόν $\|\bar N(u_i,v_i)\|\,\Delta u_i\,\Delta v_i$

$\Rightarrow$ προσεγγιστικά η επιφ. $\bar\Phi: K\to\mathbb{R}^3$ έχει εμβαδόν $\sum_{i=1}^{k}\|N(u_i,v_i)\|\,\Delta u_i\,\Delta v_i$

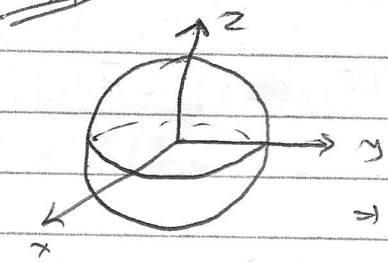


<u>Ορισμός</u>: Έστω $\bar\Phi$ μια επιφ. (όπως στον αρχικό ορισμό) με παραμετρικό πεδίο $K\subset\mathbb{R}^2$ (συμπ. κ' J-μετρ.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Το ολοκλ. $A(\bar\Phi)=\int_K \|\bar N(u,v)\|\,d(u,v) = \int_K \left\|\frac{\partial\bar\Phi}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\bar\Phi}{\partial v}(u,v)\right\|d(u,v)$

είναι το εμβαδό του (τμήματος) επιφάνειας $\bar\Phi: K\to\mathbb{R}^3$

<u>π.χ.</u>: $S=\bar\Phi([0,\pi]\times[0,2\pi]) = \left\{ r\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \middle| (\theta,\varphi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]\right\}$



$\Rightarrow \|\bar N(\theta,\varphi)\| = r^2\sin\theta \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Άρα $A(\bar\Phi)=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta =$

$= 2\pi r^2 \underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta}_{2} = 4\pi r^2 = A(\bar\Phi)$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\bar\Phi$ με παραμ. πεδίο K και $f:\bar\Phi(K)\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε το: $\int_{\bar\Phi} f\,d\sigma := \int_K f(\bar\Phi(u,v))\,\|\bar N(u,v)\|\,d(u,v)$

ονομάζεται επιφανειακό ολοκλ. της f πάνω από την επιφάνεια $\bar\Phi$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Αν $f\equiv 1$, $f:\bar\Phi(K)\to\mathbb{R}$, $f(\bar\Phi(u,v))=1,\ \forall (u,v)\in K \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\int_{\bar\Phi} 1\,d\sigma = A(\bar\Phi)}$